

Yüzey Eğrisi Olarak Bazı Spiral Eğrilerinin Diferansiyel Geometrisi

İbrahim Öztuğ BİLDİRİCİ

Konya Teknik Üniversitesi Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi
iobildirici@ktun.edu.tr

2019

Özet

Bu makalede \mathbb{E}^3 'de yüzey eğrileri olan spiraller, silindir, koni ve küre yüzeylerine sarılanlar olarak ele üç ana başlıkta alınacaktır. Eğriler, eğrilik, burulma ve yay uzunluğu ve diğer özellikleri bakımından irdelenecektir.

1 Giriş

Bu çalışmada spiral eğrileri üç boyutlu yüzey eğrileri olarak ele alınacaktır. Bu bağlamda silindir, koni ve küre yüzeyleri seçilmiştir. Kartografyada meridyenleri sabit açı altında kesen eğri olan loksodrom eğrisi de küresel spiraldir. Kartografya kaynaklarında sıklıkla ele alınan eğri, burada parametrik gösteriminden hareketle incelenmiş, küresel spirallerin özel bir durumu olduğuna dikkat çekilmiştir.

Birinci bölümde konik, ikinci bölümde silindirik, üçüncü bölümde küresel spiraller incelenmiş, sonuç bölümünde genel bir değerlendirme verilmiştir.

2 Materyal ve Metot

Spiral eğrileri yay uzunluğu yarıçapı ile ters orantılı olan eğriler olarak tanımlanır. \mathbb{E}^2 ve \mathbb{E}^3 uzaylarında çok sayıda spiral tanımlanmıştır. Spirallerin en önemli özelliği kapalı eğri olmamalarıdır. Yüzey eğrileri olarak da \mathbb{E}^3 'de tanımlı çok sayıda spiral söz konusudur. Bu bağlamda çok bilinen bir spiral türü yeryüzü için tanımlanmış bir kürede Meridyenleri sabit açı altında kesen loksodrom eğrisidir.

2.1 Notasyon

t	Eğri parametresi
u, v	Yüzey parametreleri
$\mathbf{f}(t)$	Eğrinin parametrik gösterimi, vektör fonksiyon
$\mathbf{x}(u, v)$	Yüzeyin parametrik gösterimi, vektör fonksiyon
r	Küre yarıçapı

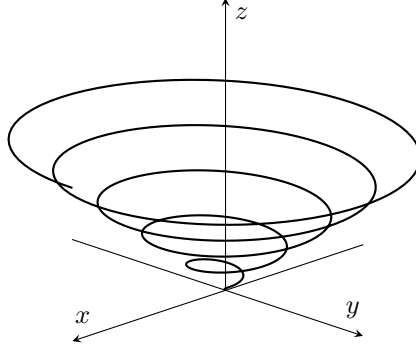
3 Araştırma ve Tartışma

3.1 Konik Spiral

Koniye sarılan spiralin parametrik gösterimi aşağıdaki gibidir. Grafiği Şekil 1’de görülmektedir.

$$\mathbf{f}(t) = t \cos t \mathbf{e}_1 + t \sin t \mathbf{e}_2 + t \mathbf{e}_3 \quad (1)$$

Türevleri bulalım.



Şekil 1: Konik spiral ($0 \leq t \leq 10\pi$)

$$\begin{aligned} \mathbf{f}'(t) &= (\cos t - t \sin t) \mathbf{e}_1 + (\sin t + t \cos t) \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{f}''(t) &= -(2 \sin t + t \cos t) \mathbf{e}_1 + (2 \cos t - t \sin t) \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{f}'''(t) &= (-3 \cos t + t \sin t) \mathbf{e}_1 - (3 \sin t + t \cos t) \mathbf{e}_2 \end{aligned} \quad (2)$$

Yay Uzunluğu

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}'(t)\| &= \sqrt{t^2 + 2} \\ s(t) &= \int_0^t \sqrt{t^2 + 2} dt = \frac{1}{2} (t\sqrt{t^2 + 2} - \ln 2) + \ln(t + \sqrt{t^2 + 2}) \end{aligned} \quad (3)$$

Buradaki integral ve çözümü basit olmadığından yay uzunluğunun numerik hesaplanması tercih edilebilir.

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{i=1}^n \|\mathbf{f}(t_i) - \mathbf{f}(t_{i-1})\| \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{(t_i \cos t_i - t_{i-1} \cos t_{i-1})^2 + (t_i \sin t_i - t_{i-1} \sin t_{i-1})^2 + (t_i - t_{i-1})^2} \end{aligned} \quad (4)$$

Eğrilik

$$\begin{aligned}\mathbf{f}' \times \mathbf{f}'' &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \cos t - t \sin t & \sin t + t \cos t & 1 \\ -(2 \sin t + t \cos t) & 2 \cos t - t \sin t & 0 \end{vmatrix} \\ &= (2 \cos t - t \sin t)\mathbf{e}_1 - (2 \sin t + t \cos t)\mathbf{e}_2 + (t^2 + 2)\mathbf{e}_3 \\ \|\mathbf{f}' \times \mathbf{f}''\| &= \sqrt{t^4 + 5t^2 + 8}\end{aligned}\quad (5)$$

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{f}' \times \mathbf{f}''\|}{\|\mathbf{f}'(t)\|^3} = \frac{\sqrt{t^4 + 5t^2 + 8}}{(t^2 + 2)^{\frac{3}{2}}}\quad (6)$$

Burulma

$$\begin{aligned}[\mathbf{f}'\mathbf{f}''\mathbf{f}'''] &= \begin{vmatrix} \cos t - t \sin t & \sin t + t \cos t & 1 \\ -(2 \sin t + t \cos t) & 2 \cos t - t \sin t & 0 \\ -3 \cos t + t \sin t & 3 \sin t + t \cos t & 0 \end{vmatrix} \\ &= t^2 + 6\end{aligned}\quad (7)$$

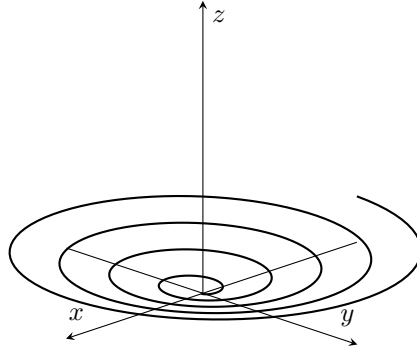
$$\tau = \frac{[\mathbf{f}'\mathbf{f}''\mathbf{f}''']}{\|\mathbf{f}' \times \mathbf{f}''\|^2} = \frac{t^2 + 6}{t^4 + 5t^2 + 8}\quad (8)$$

3.1.1 Genel Durum

Yukarıda eğrinin daha kolay incelenebilmesi için basit parametrik gösterimi ele alınmıştır. En genel parametrik gösterim $r > 0, a \neq 0$ olmak üzere aşağıdaki gibidir (Şekil 2).

$$\mathbf{f}(t) = rt \cos at \mathbf{e}_1 + rt \sin at \mathbf{e}_2 + t \mathbf{e}_3\quad (9)$$

Burada r koni taban yarıçapı, a ise eğrinin ne kadar sık tur atması ile ilgili parametrelerdir. Eğrilik ve burulma bu durumda aşağıdaki gibidir (Weissstein,



Şekil 2: Konik spiral ($0 \leq t \leq 3\pi, r = 2, a = 3$)

2019a).

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{ar\sqrt{4 + a^2t^2 + r^2(2 + a^2t^2)^2}}{[1 + r^2(1 + a^2t^2)]^{3/2}} \\ \tau &= \frac{a(6 + a^2t^2)}{4 + a^2t^2 + r^2(2 + a^2t^2)^2}\end{aligned}\quad (10)$$

Koni tabanı elips de olabilir. b, c elips yarıçapları olmak üzere parametrik gösterim,

$$\mathbf{f}(t) = bt \cos ate_1 + ct \sin ate_2 + te_3 \quad (11)$$

ile verilir. Bu durumda yay uzunluğu eliptik integral nedeniyle numerik olarak hesaplanmalıdır.

Sayısal Örnek $a = 2, b = 3, c = 4$ alarak $0 \leq t \leq \pi/4$ aralığında yay uzunluğunu sayısal olarak hesaplayalım. $\Delta t = \pi/40$ ve $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ olarak toplam oluşturulur.

$$s(t) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(\|\mathbf{f}(t_{i+1}) - \mathbf{f}(t_i)\|)}$$

Tablo 1: Tabanı elips olan koniye sarılan spiral için yay uzunluğu hesabı

t_i	$\mathbf{f}(t_i)$	$\sqrt{(\ \mathbf{f}(t_{i+1}) - \mathbf{f}(t_i)\)}$
0.0000	(0.0000 , 0.0000 , 0.0000)	
0.0785	(0.2327 , 0.0491 , 0.0785)	0.2505
0.1571	(0.4482 , 0.1942 , 0.1571)	0.2713
0.2356	(0.6298 , 0.4279 , 0.2356)	0.3062
0.3142	(0.7625 , 0.7386 , 0.3142)	0.3469
0.3927	(0.8330 , 1.1107 , 0.3927)	0.3868
0.4712	(0.8310 , 1.5250 , 0.4712)	0.4216
0.5498	(0.7488 , 1.9594 , 0.5498)	0.4491
0.6283	(0.5825 , 2.3903 , 0.6283)	0.4685
0.7069	(0.3317 , 2.7926 , 0.7069)	0.4806
0.7854	(0.0000 , 3.1416 , 0.7854)	0.4878
Σ		3.8693

Tablo 1'de verilen sayısal değerlere göre yay uzunluğu 3.8693 birimdir.

3.2 Silindirik Spiral

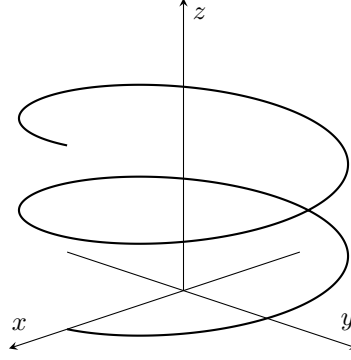
3.2.1 Tabanı Daire Olan Silindirik Spiral

Silindir yüzeyine sarılan spiral helis olarak da adlandırılır. Parametrik gösterimi $a > 0, b \neq 0$ olmak üzere aşağıdaki gibidir (Şekil 3).

$$\mathbf{f}(t) = a \cos te_1 + a \sin te_2 + bte_3 \quad (12)$$

Türevler:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}'(t) &= -a \sin te_1 + a \cos te_2 + be_3 \\ \mathbf{f}''(t) &= -a \cos te_1 - a \sin te_2 \\ \mathbf{f}'''(t) &= a \sin te_1 - a \cos te_2 \end{aligned} \quad (13)$$



Şekil 3: Silindirik spiral ($0 \leq t \leq 4\pi$, $a = 2$, $b = 3$)

Yay Uzunluğu

$$\begin{aligned}\|\mathbf{f}'(t)\| &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ s(t) &= \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^t dt = \sqrt{a^2 + b^2} t\end{aligned}\quad (14)$$

Eğrinin doğal gösterimi:

$$\begin{aligned}t &= \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \mathbf{f}(s) &= a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \mathbf{e}_1 + a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \mathbf{e}_2 + \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \mathbf{e}_3\end{aligned}\quad (15)$$

Eğrilik

$$\begin{aligned}\mathbf{f}' \times \mathbf{f}'' &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -a \sin t & a \cos t & b \\ -a \cos t & -a \sin t & 0 \end{vmatrix} \\ &= ab \sin t \mathbf{e}_1 - ab \cos t \mathbf{e}_2 + a^2 \mathbf{e}_3\end{aligned}\quad (16)$$

$$\begin{aligned}\|\mathbf{f}' \times \mathbf{f}''\| &= a\sqrt{a^2 + b^2} \\ \kappa &= \frac{\|\mathbf{f}' \times \mathbf{f}''\|}{\|\mathbf{f}'(t)\|^3} = \frac{a}{a^2 + b^2}\end{aligned}\quad (17)$$

Eğriliğin parametreden bağımsız olması, eğrinin her yerinde sabit olduğunu göstermektedir.

Burulma

$$[\mathbf{f}' \mathbf{f}'' \mathbf{f}'''] = \begin{vmatrix} -a \sin t & a \cos t & b \\ -a \cos t & -a \sin t & 0 \\ a \sin t & -a \cos t & 0 \end{vmatrix} = a^2 b\quad (18)$$

$$\tau = \frac{[\mathbf{f}' \mathbf{f}'' \mathbf{f}''']}{\|\mathbf{f}' \times \mathbf{f}''\|^2} = \frac{a^2 b}{a^2(a^2 + b^2)} = \frac{b}{a^2 + b^2}\quad (19)$$

Burulma da eğrilik gibi eğri boyunca sabittir.

3.2.2 Tabanı Elips Olan Silindirik Spiral

Parametrik gösterimi $a > 0, b > 0, c \neq 0$ olmak üzere aşağıdaki gibidir.

$$\mathbf{f}(t) = a \cos t \mathbf{e}_1 + b \sin t \mathbf{e}_2 + ct \mathbf{e}_3 \quad (20)$$

Türevler:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}'(t) &= -a \sin t \mathbf{e}_1 + b \cos t \mathbf{e}_2 + c \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{f}''(t) &= -a \cos t \mathbf{e}_1 - b \sin t \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{f}'''(t) &= a \sin t \mathbf{e}_1 - b \cos t \mathbf{e}_2 \end{aligned} \quad (21)$$

Yay Uzunluğu

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}'(t)\| &= \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t + c^2} \\ s(t) &= \int_0^t \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t + c^2} dt \end{aligned} \quad (22)$$

Burada eliptik integral ortaya çıkar. Çözümü numerik olarak yapılabilir.

Eğrilik

$$\begin{aligned} \mathbf{f}' \times \mathbf{f}'' &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -a \sin t & b \cos t & c \\ -a \cos t & -b \sin t & 0 \end{vmatrix} \\ &= bc \sin t \mathbf{e}_1 - ac \cos t \mathbf{e}_2 + abc \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}' \times \mathbf{f}''\| &= \sqrt{b^2 c^2 \sin^2 t + a^2 c^2 \cos^2 t + a^2 b^2} \\ \kappa &= \frac{\|\mathbf{f}' \times \mathbf{f}''\|}{\|\mathbf{f}'(t)\|^3} = \frac{\sqrt{b^2 c^2 \sin^2 t + a^2 c^2 \cos^2 t + a^2 b^2}}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t + c^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (24)$$

Burulma

$$[\mathbf{f}' \mathbf{f}'' \mathbf{f}'''] = \begin{vmatrix} -a \sin t & b \cos t & c \\ -a \cos t & -b \sin t & 0 \\ a \sin t & -b \cos t & 0 \end{vmatrix} = abc \quad (25)$$

$$\tau = \frac{[\mathbf{f}' \mathbf{f}'' \mathbf{f}''']}{\|\mathbf{f}' \times \mathbf{f}''\|^2} = \frac{abc}{b^2 c^2 \sin^2 t + a^2 c^2 \cos^2 t + a^2 b^2} \quad (26)$$

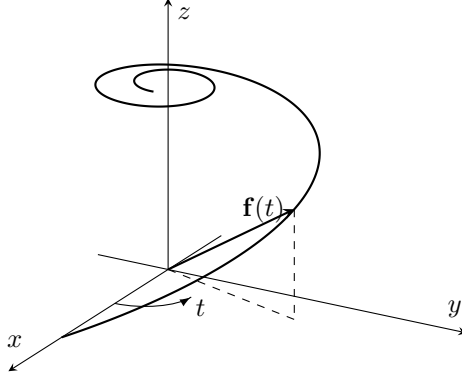
3.3 Küresel Spiral

Küreye sarılan spiral seçilen parametreye göre değişik şekillerde tanımlanabilir. Weissstein (2019b) aşağıdaki parametrik gösterimi vermiştir (Şekil 4).

$$\mathbf{f}(t) = r \frac{\cos t}{\sqrt{1 + a^2 t^2}} \mathbf{e}_1 + r \frac{\sin t}{\sqrt{1 + a^2 t^2}} \mathbf{e}_2 + r \frac{at}{\sqrt{1 + a^2 t^2}} \mathbf{e}_3 \quad (27)$$

Burada eğri parametresi ile küresel koordinatlar ($-\pi/2 \leq u \leq \pi/2, 0 \leq v \leq 2\pi$) arasındaki ilişkiler,

$$\begin{aligned} v &= t \\ u &= \arctan(at) \end{aligned} \quad (28)$$



Şekil 4: Küresel spiral ($0 \leq t \leq 4\pi, r = 2, a = 0.57$)

şeklinde. a ise eğrinin x eksenini kestiği noktadaki ($u = 0, v = 0$) eğimidir. Meridyenleri sabit açı altında kesen küresel spiral loksodrom olarak adlandırılır. (27) ile verilen eğri küresel spiraldir, ancak $v = \text{sabit}$ eğrilerini ya da meridyenleri sabit açı altında kesmez. Bunu irdelemek için kürenin parametrik gösteriminden

$$\mathbf{x}(u, v) = r \cos u \cos v \mathbf{e}_1 + r \cos u \sin v \mathbf{e}_2 + r \sin u \mathbf{e}_3 \quad (29)$$

yararlanarak eğrinin değişik noktalarında $v = \text{sabit}$ ile yaptığı açığa bakılabilir. Bu açı \mathbf{x}_u ile $\mathbf{f}'(t)$ vektörleri arasındaki açıdan başka bir şey değildir.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = -r \sin u \cos v \mathbf{e}_1 - r \sin u \sin v \mathbf{e}_2 + r \cos u \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{f}'(t) &= \frac{r}{(1 + a^2 t^2)^{\frac{3}{2}}} \left[(-a^2 t \cos t - (1 + a^2 t^2) \sin t) \mathbf{e}_1 \right. \\ &\quad \left. + (a^2 t^2 \cos t - a^2 t \sin t + \cos t) \mathbf{e}_2 + a \mathbf{e}_3 \right] \\ \cos \theta &= \frac{\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{f}'}{\|\mathbf{x}_u\| \|\mathbf{f}'\|} \end{aligned} \quad (30)$$

Sayısal İrdeleme 1: Eğrinin eğimini 20° ($a = 0.364$), küre yarıçapını 1 alarak eğri üzerinde bir noktada açığa bakalım.

$$\begin{aligned} v = t = 10^\circ \quad u &= \arctan(at) = 3.63482^\circ \\ \mathbf{x}_u &= (-0.06248, -0.01102, 0.99799) \\ \|\mathbf{x}_u\| &= 1 \\ \mathbf{f}' &= (-0.19593, 0.97884, 0.36178) \\ \|\mathbf{f}'\| &= 1.06179 \\ \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{f}' &= 0.36251 \\ \theta &= 70.03705^\circ \end{aligned}$$

Eğrinin eğimini 20° aldığımızdan x eksenini kestiği noktada $\theta = 70^\circ$ olur. Buradan eğri üzerinde açının sabit kalmadığı sayısal olarak görülmektedir.

θ açısının sabit kalması için $u = v = 0$ noktasından başlayan eğri için u, v ilişkisini $v = \tan \theta \ln \tan(\pi/4 + u/2)$ şeklinde belirlemek gerekir. $a = \cot \theta$ alınarak parametrik gösterim elde edilebilir (Bildirici, 2019).

$$\begin{aligned} v &= t \\ u &= 2 \arctan e^{at} - \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(t) &= r \sin(2 \arctan e^{at}) \cos t \mathbf{e}_1 + r \sin(2 \arctan e^{at}) \sin t \mathbf{e}_2 \\ &\quad - r \cos(2 \arctan e^{at}) \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (32)$$

(32) vektör fonksiyonu için $\|\mathbf{f}\| = r$ olduğundan eğri küre yüzeyindedir. Daha sade bir şekilde yazılabilir.

$$\mathbf{f}(t) = r \frac{2e^{at}}{e^{2at} + 1} \cos t \mathbf{e}_1 + r \frac{2e^{at}}{e^{2at} + 1} \sin t \mathbf{e}_2 + r \frac{e^{2at} - 1}{e^{2at} + 1} \mathbf{e}_3 \quad (33)$$

Bu vektör fonksiyon (27) ile benzer özellikte olduğundan eğrinin görünümünü Şekil 4 ile çok benzerdir. $v = \text{sabit}$ eğrileri ile açısını bulmak için teğet vektörü belirleyelim.

$$\begin{aligned} \mathbf{f}'(t) &= r \left[- \frac{2e^{at}(e^{2at} \sin t + ae^{2at} \cos t - a \cos t + \sin t)}{(e^{2at} + 1)^2} \mathbf{e}_1 \right. \\ &\quad + \frac{2e^{at}(-ae^{2at} \sin t + a \sin t + e^{2at} \cos t + \cos t)}{(e^{2at} + 1)^2} \mathbf{e}_2 \\ &\quad \left. + \frac{4ae^{2at}}{(e^{2at} + 1)^2} \mathbf{e}_3 \right] \end{aligned} \quad (34)$$

Sayısal İrdeleme 2: Birinci sayısal irdelemedeki parametreler ile aynı hesaplamaları yapalım.

$$\begin{aligned} v &= t = 10^\circ \quad u = 2 \arctan e^{at} - \pi/2 = 3.63726^\circ \\ \mathbf{x}_u &= (-0.06248, -0.01102, 0.99799) \\ \|\mathbf{x}_u\| &= 1 \\ \mathbf{f}' &= (-0.19599, 0.97882, 0.36251) \\ \|\mathbf{f}'\| &= 1.06203 \\ \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{f}' &= 0.36324 \\ \theta &= 70.0^\circ \end{aligned}$$

Burada açının değişmediği görülmektedir.

Burada incelenen, (33) ve (27) ile verilen vektör fonksiyonlar x ekseninden başlamakta, başka bir deyişle kürede Ekvator ile x ekseninin kesişim noktasından geçmektedir. Bu özel bir durumdur. Eğrinin ekvatoru kestiği boylam da (v_0) dikkate alınarak parametre $t = v - v_0$ biçiminde seçilmelidir.

P_1P_2 noktalarından geçen loksodrom için meridyenle yaptığı açığı yazalım.

$$\tan \theta = \frac{v_2 - v_1}{\ln \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{u_2}{2} \right) - \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{u_1}{2} \right)} \quad (35)$$

Bu şekilde eğri boyunca sabit olan açı belirlenir. Açı eşitliğini eğrinin Ekvatoru kestiği nokta $P_0(0, v_0)$ ile P_1 arasında yazarak v_0 bulunur.

$$\tan \theta = \frac{v_1 - v_0}{\ln \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{u_1}{2} \right)}$$

$$v_0 = v_1 - \tan \theta \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{u_1}{2} \right) \quad (36)$$

Aslında iki noktadan geçen iki farklı loksodrom eğrisi vardır. Yukarıdaki bağıntılarda $|\Delta v| = |v_2 - v_1| \leq 2\pi$ ise kısa olan loksodrom eğrisi elde edilir. Aksi halde uzun olan eğri tanımlanmış olur. $|\Delta v| > 2\pi$ durumunda kısa olan loksodrom için Δv negatif ise 2π ile toplanmalı, değilse çıkarılmalıdır.

Elipsoite sarılan spiral eğrileri de türetilebilir. Elipsoidal coğrafi koordinatlar için loksodrom eğrisi Snyder (1987, s. 47) tarafından incelenmiştir.

Küresel spiraller için ikinci ve üçüncü türevler daha karmaşık olduğundan eğrilik ve burulma hesaplamaları zahmetlidir.

4 Sonuç

Bu çalışmada \mathbb{E}^3 uzayında spiral eğrilerinin diferansiyel geometri açısından özellikleri incelenmiştir. Eğriler silindire, koniye ve küreye sarılanlar olmak üzere üç ana başlıkta incelenmiş, parametrik gösterimleri temelinde yay uzunluğu eğrilik ve burulma gibi özellikleri ele alınmıştır. Özellikle loksodrom eğrisi konusunda verilen parametrik gösterim ve irdeleme kaynaklarda yer almadığından önemlidir.

Teşekkür

Bu çalışmada bazı türev ve integrallerin bulunmasında Wolfram Alpha (<https://www.wolframalpha.com/>) sayfasından, metin yazımında L^AT_EX doküman hazırlama dilinden, şekillerde TikZ/Pgfplots paketlerinden yararlanılmıştır. Yazar ilgili teknolojileri geliştiren ve kullanıma açan kurum ve kişilere teşekkür eder.

Kaynaklar

- Bildirici, İ. Ö. (2019). *Kartografya: Harita Tasarımı ve Kullanımı için Gerekli Bilim, Sanat ve Teknik*. Atlas Akademi Yayınevi, Konya, 2. baskı.
- Snyder, J. P. (1987). *Map projections-A working manual*, volume 1395. US Government Printing Office, Washington, D.C.
- Weissstein, E. W. (2019a). Conical spiral. <http://mathworld.wolfram.com/ConicalSpiral.html>. Giriş: 18.11.2019.
- Weissstein, E. W. (2019b). Spherical spiral. <http://mathworld.wolfram.com/SphericalSpiral.html>. Giriş: 18.11.2019.